Résumé n° 1: **Généralités sur les fonctions**

1-Eléments de symétrie

On considère une fonction f définie sur une partie E centrée en a

-$\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de (C_f) si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $f(a+x) + f(a-x) = 2b$

- (D): $x = a$ est un axe de symétrie de (C_f) si et seulement si pour tout $x \in E$ on a $f(a+x) = f(a-x)$.

2- Limites et fonctions usuelles

-On appelle fonction usuelle toute fonction polynome,fraction rationnelle,trigonométrique , racine carrée,valeur absolue ainsi que la somme ,le produit et le quotient de deux de ces fonctions .

Si f une fonction usuelle , si f est définie en x_0 alors la limite de f quand x tend vers x_0 est $f(x_0)$

- Soit f une fonction quelconque non définie en x_0 .Si pour $x \neq x_0$ on a $f(x) = g(x)$ où g est une fonction usuelle ,alors la limite de f quand x tend vers x_0 est égale à $g(x_0)$

3- Théorèmes dit "de comparaison"

α désigne soit un réel soit l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ est un réel quelconque .

Soient f, u , v trois fonctions définies au voisinage de α .

- Si pour x voisin de α on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$
- Si pour x voisin de α on a $f(x) \leq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$
- Si pour x voisin de α on a $|f(x) - \ell| \leq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = 0$,alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$
- Si pour x voisin de α on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$

4- Limites et opérations usuelles

- *Limite d'une somme* : Pas de problèmes sauf dans le cas de la Forme Indéterminée" $+\infty - \infty$".
- *Limite d'un produit* : Une Forme Indéterminée " $0 \times \infty$ ".

Autres cas:Si une des deux fonctions tend vers 0 le produit aussi.

Si une fonction tend vers l'infini le produit tend vers l'infini "régle des signes" .

- *Limite d'un quotient* : Deux Formes Indéterminées "0/0" et"∞/∞" dans les autres cas:

Si le dénominateur tend vers l'infini ,le quotient tends vers 0 ,Si le dénominateur tend vers 0, le quotient tend vers l' infini "régle des signes" .Dans ce dernier cas on déterminera avec précision le signe du dénominateur.

5- Théorèmes généraux relatifs à certains cas d'indétermination

-La limite d'un polynôme lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré .

-La limite d'une fraction rationnelle lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur

-Dans le cas d'expressions comportant des radicaux et se présentant sous la forme indeterminée " $+\infty - \infty$" ou " $0 \times \infty$ ",.on pourra utiliser l'expression conjuguée ou la mise en facteur du terme dominant ou les deux.

- Pour des formes indeterminées du type"0/0",on pourra utiliser une limite usuelle ou un taux d'accroissement.

6- Limites relatives aux fonctions trigonométriques

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

7- Théorème de composition des limites et changement de variable

α ,β , γ désignent trois réels ou les symboles $+\infty$; $-\infty$ .Soient f et g deux fonctions .

On suppose que f(x) est défini au voisinage de α et que g(x) est défini au voisinage de β .

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (g \circ f)(x) = \gamma$.

Ce théorème s'utilise sous la forme du changement de variable, on appelle X l'expression à changer , on explicite si nécessaire le changement réciproque ,on détermine la limite de X lorsque x tend vers α, puis on utilise un résultat connu.

8- Asymptotes

α désigne l'un des symboles $+\infty$ ou $-\infty$,a et L deux réels, f est une fonction définie au voisinage de α ou de a .

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = L$ alors la droite (D) : $y = L$ est une asymptote horizontale à (C_f) .

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \alpha$ alors la droite (Δ) : $x = a$ est une asymptote verticale à (C_f) .

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) - (mx + p) = 0$,on dit que la droite (D): $y = mx + p$ est une asymptote oblique à (C_f).

Francis Cortado

Résumé n° 2: **Continuité et dérivabilité**

1-Continuité

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans le domaine D_f de cette fonction f

- Soit x_0 un point de I ,on dit que f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si et seulement si elle est continue en tout point de I
- Les fonctions usuelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition
- la composée de deux fonctions usuelles est une fonction continue.

-*Théorème des valeurs intermédiaires.*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I = [a , b] (a < b).
Soit k un réel quelconque compris entre f (a) et f (b)
Alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que f(c) = k .

-conséquence :l'image d'un intervalle I par une fonction continue est un aussi un intervalle

-*Théorème de la bijection*

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I = [a , b] (a < b)
Soit k un réel quelconque compris entre f (a) et f (b) .
Alors l' équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans l'intervalle [a , b].
On résume ceci en disant que f réalise une bijection de [a , b] sur [f (a), f(b)] ou [f (b), f (a)] selon que f soit croissante ou décroissante sur cet intervalle .

- *Principe de localisation:*

Si f est continue et strictement monotone sur I = [a , b] et si $f(a) \times f(b) \leq 0$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans I = [a , b]

2- Dérivation

-Soit f une fonction définie sur un intervalle I inclus dans D_f ,et soit a un point de I.

On dit que f est dérivable en I si et seulement si le taux d' accroissement de f en a ,

$T_a(f) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers a ou quand h tend vers 0

Cette limite ℓ est appelée nombre dérivé de f en a , on la note $f\,'(a)$.

-La fonction qui a tout point de cet intervalle associe le nombre dérivé f '(a) ,de la fonction f en ce point est appelée fonction dérivée de f , on la note $f\,'$

-Les expressions $f(x) = f(a) + (x - a).f\,'(a) + (x - a).\varepsilon(x - a)$ avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x - a) = 0$

et $f(x + h) = f(a) + h.f\,'(a) + h.\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Sont appelées <u>développements limités à l'ordre 1</u> de la fonction f au voisinage de a.

-Toute fonction dérivable en un point a est continue en ce point ,mais la réciproque est fausse .

-Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et k un réel .

$(u + v)' = u' + v'$, $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$, $(ku)' = k \times u'$

Si deplus v ne s'annule pas sur I alors : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

- Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I,et à valeurs dans un intervalle J.
Soit v une fonction définie et dérivable sur cet intervalle J .
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I avec $(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$
- Les fonctions : polynômes , fractions rationnelles ,trigonométriques ainsi que leurs composées et celles qui s'en déduisent par les opératios usuelles sont dérivables sur tout intervalle inclus dans leur domaine.
- Si f est dérivable en a alors (C_f) admet au point A(a, f (a)) une tangente d'équation $y = f\,'(a)(x - a) + f(a)$
Si la limite du taux d'accroissement est infinie quand x tend vers a alors (C_f) admet au point A(a,f(a)) une tangente verticale.
- Soit f dérivable sur un intervalle I:
Si $f\,'$ est positive sur I alors f est croissante sur I
Si $f\,'$ est négative sur I alors f est décroissante sur I et si $f\,'$ est nulle sur I alors f est constante sur I

-Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I contenant x_0 f admet en x_0 un extrémum local si et seulement si $f\,'(x)$ s'annule en changeant de signe en x_0 .

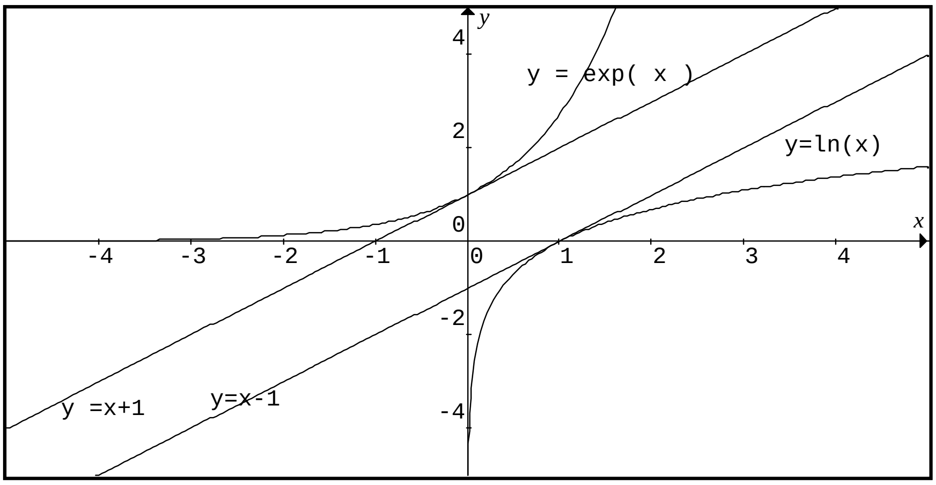
<u>Francis Cortado</u>

Résumé n° 3 : **Fonctions exponentielle et logarithme néperien**

1-Fonctions exponentielle et logarithme néperien

	Fonction exponentielle e^x	Fonction logarithme néperien $\ln(x)$
Définition	C'est l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y' = y$ et $y(0) = 1$	C'est la bijection réciproque de la fonction exponentielle
Domaine	$\mathbb{R}$	$]0, +\infty[$
Dérivabilité	Derivable sur $\mathbb{R}$ avec $(e^x)' = e^x$	Dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $[\ln(x)]' = 1/x$
Signe	Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$	Si $x \in]0, 1[$ $\ln(x) < 0$ Si $x \in]1, +\infty[$ $\ln(x) > 0$
valeurs particulières	$e^0 = 1$ et $e^1 = e$	$\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
liens	$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0, +\infty[$ $e^{\ln(x)} = x$ pour $x \in]0, +\infty[$	$\ln(e^x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}$
équations	$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $e^a = b$ avec $b \in]0,+\infty[\Leftrightarrow a = \ln(b)$	$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ pour a et b dans $]0, +\infty[$ $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$ pour $a \in]0,+\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$
inéquations	$e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$ $e^a > b$ avec $b \in]0,+\infty[\Leftrightarrow a > \ln(b)$	$\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$ pour a et b dans $]0, +\infty[$ $\ln(a) > b \Leftrightarrow a > e^b$ pour $a \in]0,+\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$
Relations algébriques	$e^{(a+b)} = e^a \times e^b$ $e^{(a-b)} = e^a / e^b$ $e^{-a} = 1/e^a$ $(e^a)^r = e^{ar}$ $r \in \mathbb{Q}$	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ $\ln(1/a) = -\ln(a)$ $\ln(a^r) = r\ln(a)$ $r \in \mathbb{Q}$
limites aux bornes et autres limites	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha . e^{-x} = 0$ $\alpha > 0$ "e^x l'emporte sur toute puissance de x" $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha . \ln(x) = 0$ $\alpha > 0$ "toute puissance de x l'emporte sur ln(x)" $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
autres dérivées	$(e^{kx})' = k e^{kx}$ $(e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$	$[\ln\lvert u(x)\rvert]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où u garde un signe constant
Tangentes particulières	au point A(0,1): $y = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x \geq x + 1$	au point B(1,0): $y = x - 1$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ $\ln(x) \leq x - 1$

2-Courbes representatives



Francis Cortado

Résumé n°4: **Autres fonctions et équations différentielles**

1-Fonctions puissances d'exposant réel

- *Fonction racine n-ième*

C'est la réciproque de la fonction puissance n-ième sur l'intervalle $[0,+\infty[$

on note $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et donc $\sqrt[n]{x^n} = x$ pour $x \in [0,+\infty[$

-*Fonction puissance d'exposant rationnel* : Pour $x \in]0, +\infty[$ $x^{p/q} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ (pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$)

- *Fonction puissance d'exposant réel* : Pour $x \in]0, +\infty[$ $x^\alpha = e^{\alpha.\ln(x)}$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$)

D' une façon générale les regles usuelles de calcul sur les puissances sont valables ,toutes ces fonctions sont dérivables sur $]0, +\infty[$ avec $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$,pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$ et $\ln(x^\alpha) = \alpha.\ln(x)$

2-Fonctions exponentielles de base *a* et logarithme décimal :

-On appelle fonction exponentielle de base a toute fonction de la forme $f_a(x) = a^x$ définie sur $\mathbb{R}$ par $a^x = e^{x\ln(a)}$ où a est un réel strictement positif .

Pour tout $a \in]0, +\infty[$, a^x est strictement positif

Ces fonctions sont définies , continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec: $(a^x)' = \ln(a) \times a^x$.

Il en résulte que si $0 < a < 1$ alors f_a est décroissante sur $\mathbb{R}$
$a > 1$ alors f_a est croissante sur $\mathbb{R}$
$a = 1$ alors f_a est constante sur $\mathbb{R}$

Ces fonctions sont les seules fonctions f , non identiquement nulles ,dérivables sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient la relation fonctionnelle : pour tout x et y appartenant à $\mathbb{R}$ $f(x + y) = f(x) \times f(y)$.

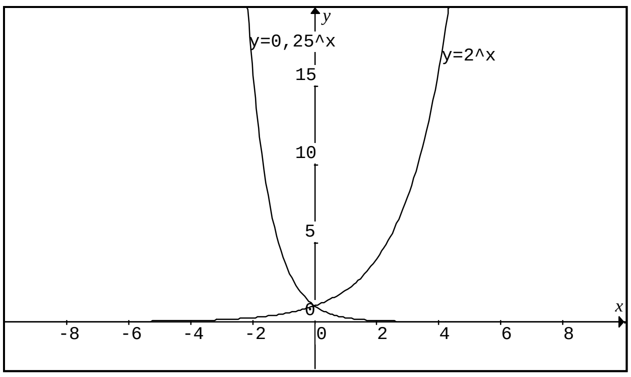
Dans le cas où $a = e$,on retrouve la fonction exponentielle classique .

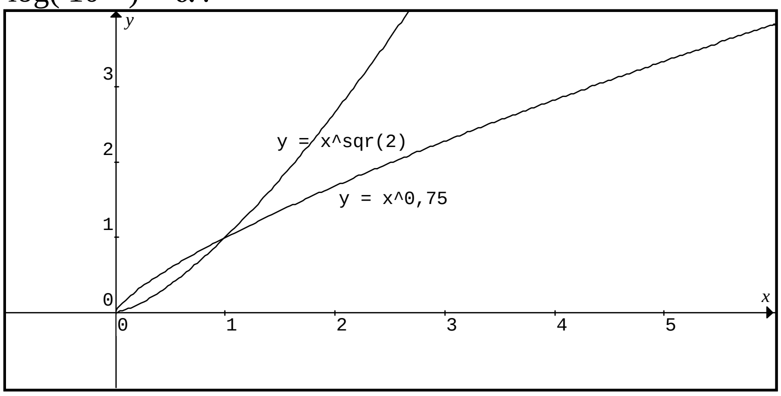
- Lorsque $a = 10$, la bijection réciproque de la fonction exponentielle de base 10 est appelée fonction logarithme décimal ,on la note log et : $y = 10^x \Leftrightarrow x = \log(y)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0;+\infty[$.

La fonction logarithme décimal est également définie sur $]0;+\infty[$ par $\log(x) = \frac{1}{\ln(10).} \times \ln(x)$

Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est $[\log(x)]' = \frac{1}{\ln(10).} \times \frac{1}{x}$.

C'est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$ qui possède les mêmes propriétés que la fonction logarithme népérien à la différence près que $\log 10 = 1$ et que $\log(10^\alpha) = \alpha$.





3-Equation différentielle du type $y' = ay + b$,avec a non nul

Une équation différentielle du type $y' = ay + b$ est une équation où l'inconnue est une fonction y (de la variable x) dérivable sur $\mathbb{R}$,a et b deux constantes réelles avec $a \neq 0$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle sont données par: $y = C e^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est une constante réelle arbitraire,il existe donc une infinité de solutions à cette équation.

Par contre il existe une solution unique qui prend en un point une valeur donnée:

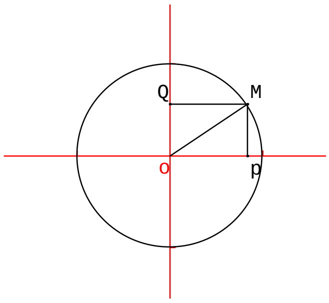
Il existe une solution unique f à l'équation $y' = ay + b$ telle que $f(x_0) = y_0$.

C'est la condition $f(x_0) = y_0$ qui permettra de déterminer de façon unique la valeur de la constante C.

Francis Cortado

Résumé n°5: **Trigonométrie et tableau des dérivées usuelles**

1-**Trigonométrie**



$\cos x = \overline{OP}$ $\sin x = \overline{OQ}$ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} [\pi]\}$

On a les propriétés suivantes: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodique: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ .La fonction tangente est π-périodique: $\tan(x + \pi) = \tan x$

Les fonctions sinus et cosinus sont paires, La fonction tangente est impaire

Formules des angles associés : ♦ $\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -$ t

♦ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ ♦ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$

♦ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ ♦ $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

Formules d'addition : ♦ $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ♦ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

♦ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ ♦ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Formules de duplication : ♦ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

♦ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Formules de linéarisation : ♦ $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

Formules de passage à l'angle moitié : ♦ $1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ $1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Equations trigonométriques: ♦ $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \alpha[2\pi]$ ou $x = -\alpha[\ \pi]$

♦ $\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha[2\pi]$ ou $x = \pi - \alpha[2\pi]$

2-**Tableau des dérivées usuelles**

Fonction $f(x)$ et domaine de dérivabilité	dérivée $f'(x)$
$f(x) = C$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^\alpha$ sur $]0,+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ cette définition se prolonge à $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}^*$ou $\mathbb{R}$,selon les valeurs de α $f(x) = 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$ $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ $f'(x) = -1/x^2$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = (u(x))^\alpha$	$f'(x) = \alpha . u'(x).(u(x))^{\alpha-1}$
$f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$ sur $]0,+\infty[$	$f'(x) = 1/x$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a\sin(ax+b)$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a\cos(ax+b)$
$f(x) = e^{kx}$	$f'(x) = ke^{kx}$
$f(x) = e^{u(x)}$	$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
$f(x) = \ln\|u(x)\|$ u gardant un signe constant sur un intervalle I où elle est dérivable.	$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$f(x) = \ln\|x\|$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = a^x$ avec $a > 0$ et $x \in]0,+\infty[$	$f'(x) = \ln(a) \times a^x$

Francis Cortado

Résumé n°6: **Nombres Complexes**

1-**Aspect Algébrique**

On appelle ensemble des nombres complexes l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres de la forme $z = a+ib$,où a et b sont deux réels et i est un "symbole" tel que $i^2 = -1$.

Les régles usuelles de calcul dans $\mathbb{R}$ sont encore valables dans $\mathbb{C}$,on dit que ($\mathbb{C}$,+, $\times$) est un corps commutatif

La forme z = $a+ib$ est appelée forme algébrique de z.

Tout nombre réel est un nombre complexe particulier : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,les nombres complexes de la forme ib sont appelés imaginaires purs,on note leur ensemble $i\mathbb{R}$.

a est appelé partie réelle de $z = a+ib$,on note $a = \Re e(z)$ et b est appelé partie imaginaire de z ,on note $b = \Im m(z)$: z = 0 $\Leftrightarrow \Re e(z) = \Im m(z) = 0$ et $z = z' \Leftrightarrow \Re e(z) = \Re e(z')$ et $\Im m(z) = \Im m(z')$.

z $\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im m(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re e(z) = 0$ .Dans $\mathbb{C}$ la formule du binôme de Newton est valable:

$(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . z^{n-k} . z'^k$ les coéfficients utilisés étant les coefficients du triangle de Pascal:1,2,1 puis 1,3,3,1 et 1,4,6,4,1 etc…..

Au nombre complexe z = $a+ib$ on associe le complexe $\overline{z} = a - ib$ appelé complexe conjugué de ,on a alors les relations $z+\overline{z} = 2a = 2\Re e(z)$ et $z - \overline{z} = 2ib = 2i\Im m(z)$ ou inversement $\Re e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\Im m(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2i}$

Les puissances de i forment une suite périodique: pour k $\in \mathbb{N}$ $i^{4k} = 1$ $\quad i^{4k+1} = i$ $\quad i^{4k+2} = -$ $\quad i^{4k+3} = -i$

Pour écrire un quotient sous forme algébrique ,on multipliera le dénominateur et le numérateur de cette fraction par le conjugué du dénominateur: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\,\overline{z}_2}{z_2\,\overline{z}_2} = \dfrac{z_1\,\overline{z}_2}{|\,z_2|^2}$

2-**Aspect Géométrique**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.

A tout complexe $z = a+ib$,on associe un unique point M de coordonnées (a, b) et réciproquement.

M est appelé point image du complexe z et z est appelé affixe du point M.

On note M(z) le point d'affixe z et Aff(M) = z_M l'affixe de ce point M.

Les points de l'axe (Ox) ont une affixe réelle et ceux de l'axe (Oy) une affixe imaginaire pure.

On définit de façon analogue l'affixe d'un vecteur,de plus ,on a les propriétés suivantes:

$\boxed{\mathrm{P_1}}$ $Aff(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = z_A - z_B$ $\qquad \boxed{\mathrm{P_2}}$ $Aff(\vec{\mathrm{u}}+\vec{\mathrm{v}}) = Aff(\vec{\mathrm{u}}) + Aff(\vec{\mathrm{v}})$ $\qquad \boxed{\mathrm{P_3}}$ $Aff(\lambda\vec{\mathrm{u}}) = \lambda Aff(\vec{\mathrm{u}})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{\mathrm{P_4}}$ On notera I le millieu de[A,B] ,alors $z_{\mathrm{I}} = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

3-**Aspect Trigonométrique**

A tout nombre complexe z, différent de 0 ,on associe un réel θ appelé argument de z et noté Arg(z),défini par: $Arg(\mathrm{z}) = \left(\vec{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$ modulo 2π où M est le point d'affixe z .

A tout nombre compexe z = $a+ib$ on associe le réel positif appelé module de z et noté |z| ,défini par: $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \mathrm{OM}$, ou encore | z | = $\sqrt{z.\overline{z}}$,on remarque que | z | = 0 $\Leftrightarrow$ z = 0

Soit z $\neq$ 0, si on note $\theta = Arg(z)$ [2 π] et r = | z | (r est donc un réel strictement positif) alors:

$\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ $\Leftrightarrow a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$, inversement l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée forme trigonométrique du nombre complexe z .

On résume cette écriture à l'aide de la notation exponentielle: $r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$,on obtient alors:

$\overline{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = re^{-i\theta}$ et donc si $z = e^{i\theta}$ alors $\Re e(z) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\Im m(z) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Francis Cortado

4-**Propriétés de la conjugaison,du module et de l'argument d'un nombre complexe**

z_1 et z_2 sont tels que les notations utilisées soient bien définies.

$\boxed{P_5}$ *Liens avec la somme* : $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ $\text{Arg}(z_1+z_2)\neq\text{Arg}(z_1)+\text{Arg}(z_2)$

$\boxed{P_6}$ *Liens avec l'opposé* : $\overline{-z}=-\overline{z}$ $|-z|=|z|$ $\text{Arg}(-z)=\text{Arg}(z)+\pi\ [2\pi]$

$\boxed{P_7}$ *Liens avec le produit* : $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$ $\text{Arg}(z_1\times z_2)=\text{Arg}(z_1)+\text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

$\boxed{P_8}$ *Liens avec les puissances* : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$ $|z^n|=|z|^n$ $\text{Arg}(z^n)=n\,\text{Arg}(z)\ [2\pi]$

$\boxed{P_9}$ *Liens avec l'inverse*: $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right)=-\text{Arg}(z)\ [2\pi]$

$\boxed{P_{10}}$ *Liens avec le quotient*: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\text{Arg}(z_1)-\text{Arg}(z_2)\ [2\pi]$

Conséquences

Conséquences pour la notation exponentielle:

$\left|e^{i\theta}\right|=1$ $\text{Arg}(e^{i\theta})=\theta$ $\overline{\left(e^{i\theta}\right)}=e^{-i\theta}$ $e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$ $\left(e^{i\theta}\right)^n$ $e^{ni\theta}$ $=\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

valeurs particulières: $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$ $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$ $e^{i\pi}=-1$

Compléments Formules de Moîvre et d'Euler: $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

$$\cos n\theta=\frac{e^{ni\theta}+e^{-ni\theta}}{2}\quad\text{et}\quad\sin n\theta=\frac{e^{ni\theta}-e^{-ni\theta}}{2i}$$

5-**Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré à coefficients réels**

Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2+bz+c=0$ où a, b et c sont trois réels ave $a\notin$

On pose $\Delta=b^2-4ac$ alors: Si $\Delta\geq0$ deux solutions distinctes $z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta=0$ une solution double $z_0=-\frac{b}{2a}$

Si $\Delta<0$ deux solutions complexes conjuguées $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\overline{z_1}$

Les résultats concernant la somme et le produit des racines sont encore valables dans $\mathbb{C}$.

6-**Applications géométriques**

- *Ecriture complexe des transformations usuelles*:

On appelle écriture complexe d'une transformation l'expression de l'affixe z' de M' ,où M' est l'image du point M d'affixe z,en fonction de z .

♦Translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b : $z'=z+b$

♦Homothétie de centre Ω d'affixe ω, et de rapport k : $z'-\omega=k(z-\omega)$

♦Rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ : $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

- *Angle de deux vecteurs,alignement, orthogonalité*:

$\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\text{Arg}\left(\frac{Aff(\vec{v})}{Aff(\vec{u})}\right)=\text{Arg}(Aff(\vec{v}))-\text{Arg}(Aff(\vec{u}))$ ou encore $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\text{Arg}\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$

Donc A ,B et C sont alignés si et seulement si $\text{Arg}\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=0\ [\pi]\iff\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$

(AB) et (BC) sont perpendiculaires si et seulement si $\text{Arg}\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]\iff\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$

Francis Cortado

Résumé n°7: **Suites numériques**

0-Raisonnement par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout n à partir d'un certain rang n_0 ,on montre que:
-La propriété est vraie pour n_0
-On suppose qu'elle est vraie à un rang k et on montre alors qu'elle est vraie au rang k + 1

1-Sens de variation d'une suite.

-Une suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang n_0 si et seulement si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} \geq u_n$
-Elle est décroissante à partir d'un certain rang n_0 si et seulement si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} \leq u_n$
-Si pour tout n on a $u_{n+1} = u_n$ on dit que la suite est stationnaire .

2- Suites majorées,minorées,bornées.

-On dit qu'une suite (u_n) est majorée par M à partir d'un certain rang n_0
si et seulement si , pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq M$
-On dit qu'une suite (u_n) est minorée par m à partir d'un certain rang n_0
si et seulement si , pour tout $n \geq n_0$ on a $m \leq U_n$
-Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée .

3- Suites arithmétiques.

-Une suite (u_n) est dite *arithmétique* si et seulement si il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que
pour tout $n \in \mathbb{N}$,on ait $u_{n+1} = u_n + r$, r est appelée *raison* de la suite arithmétique (U_n) .
$u_n = u_0 + n r$, ou d'une façon générale $u_n = u_p + (n - p) r$,
Ce que l'on peut retenir de la façon suivante :
u_n = "premier terme" + "nombre de termes – 1" × raison .
Somme des n- premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique .

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{1}{2} \times (n+1) \times (u_0 + u_n)$$

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{1}{2} \times (n - p + 1) \times (u_p + u_n),$$

Ce que l'on peut retenir de la façon suivante $\frac{1}{2} \times$ "nombre de termes" × "premier + dernier" .

4- Suites géométriques

-Une suite (u_n) est dite *géométrique* si et seulement si il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que
pour tout $n \in \mathbb{N}$,on ait $u_{n+1} = q \times u_n$, q est appelé *raison* de la suite géométrique (U_n)
$u_n = u_0 \times q^n$, ou d'une façon générale $u_n = u_p \times q^{n-p}$
ce que l'on peut retenir de la façon suivante: U_n = "premier terme" × " raison$^{\text{nb de termes -1}}$ "
Somme des n- premiers termes consécutifs d'une suite géométrique de raison différente de 1 .

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$U_p + U_{p+1} + \ldots + U_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

Ce que l'on peut retenir de la façon suivante : "Premier terme" × " $\frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$ " .

Francis Cortado

5-Convergence des suites numériques:

On dit que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,(ou admet ℓ comme limite quand n tend vers $+\infty$)
si et seulement. si on peut rendre U_n aussi proche de L que l'on veut , à condition de prendre n suffisamment grand . On note $(u_n) \longrightarrow \ell$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$

On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ si et seulement si on peut rendre U_n aussi grand que l'on veut à condition de prendre n suffisamment grand . On note $(u_n) \longrightarrow +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

On dira que (u_n) diverge vers $-\infty$ si et seulement si la suite $(-u_n)$ diverge vers $+\infty$.
Une suite qui ne converge pas sera dite divergente .
Il se peut qu'elle n'admette aucune limite ou bien que sa limite soit $+\infty$ ou $-\infty$

6- Suites usuelles

- Les suites suivantes convergent vers 0 : $(1/n)$; $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour $n \geq 1$ et $\alpha > 0$; (a^n) pour $|a| < 1$, $\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$

-Les suites suivantes divergent vers $+\infty$: (n^α) pour $\alpha > 0$, (a^n) pour $a > 1$, $(\ln(n))$

-Croissance comparée des suites usuelles

$\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right) \longrightarrow 0$ pour $\alpha > 0$; $\left(\frac{n^\alpha}{a^n}\right) \longrightarrow 0$ pour α quelconque et $|a| > 1$; $\left(\frac{\ln(n)}{a^n}\right) \longrightarrow 0$ pour $|a| > 1$

7-Théorèmes de comparaison

- Si à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$ et que $(u_n) \longrightarrow +\infty$ alors $(v_n) \longrightarrow +\infty$
- Si à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$ et que $(v_n) \longrightarrow -\infty$ alors $(u_n) \longrightarrow -\infty$

8-Théorèmes des gendarmes

- Si à partir d'un certain rang on a $u_n \leq w_n \leq v_n$ et que $(u_n) \longrightarrow \ell$ et $(v_n) \longrightarrow \ell$ alors $(w_n) \longrightarrow \ell$.

- Si à partir d'un certain rang on a $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $(v_n) \longrightarrow 0$ alors $(u_n) \longrightarrow \ell$.

9-Théorème de la convergence monotone

- Toute suite croissante et majorée est convergente ,il en est de même de toute suite décroissante et minorée

- Cas des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue :
Si la suite (u_n) converge ,alors elle converge vers un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$

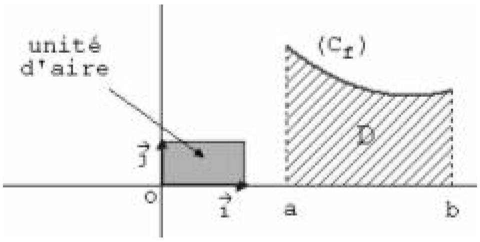
10-Suites adjacentes

- On dit que deux suites (u_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si (u_n) est croissante,(v_n) est décroissante et la différence $u_n - v_n$ tends vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Deux suites adjacentes sont convergentes et elles convergent vers la même limite

Francis Cortado

Résumé n° 8 : **Intégration**

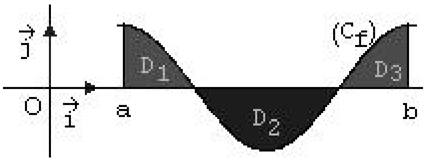
1- Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle [a , b]



Définition : On appelle intégrale entre a et b , de la fonction f , l'aire en unités d'aire du domaine D limité par (C_f) ,(Ox) , et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Ce réel est noté $\int_a^b f(x)\,dx$, x étant une variable muette.

2- Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle [a , b]



$$\int_a^b f(x)\,dx = aire\ (D_1) - aire\ (D_2) + aire\ (D_3)$$

3-Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle I

$\boxed{P_1}$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

$\boxed{P_2}$ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$\boxed{P_3}$ *Relation de Chasles*:Soit f une fonction continue sur I

Pour tout a , b et c de I ,on a : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$\boxed{P_4}$ *Linéarité*: Soient f et g deux fonctions continues sur I

Soient α et β deux réels , a et b deux points de I

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

$\boxed{P_5}$ *Positivité* : Soit f une fonction continue sur I

Soient a et b deux points de I tels que $a \leq b$.

Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in$ I, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

$\boxed{P_6}$ *Croissance de l'intégrale* : Soient f et g deux fonctions continues sur I ,

Soient a et b deux points de I tels que $a \leq b$

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in$ I , alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

$\boxed{P_7}$ *Inégalité de la moyenne*: Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux points de I m et M deux réels:

- Si $a \leq b$ et si pour tout $x \in$ [a , b] $m \leq f(x) \leq M$

  alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$
- Si pour tout $x \in$ I on a $|f(x)| \leq M$ alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M\,|b-a|$

$\boxed{P_8}$ *Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle*

On appelle valeur moyenne de f sur [a , b] le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Francis Cortado

4-Applications du calcul intégral

App1 *Calculs d'aires* .On suppose que pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) \le g(x)$,où f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$,alors l'aire du domaine limité par les courbes (C_f) , (C_g) ,et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (exprimé en unités d'aire) est égale à $\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$.

App 2 *Calculs de volumes*.Le volume du solide limité par les deux plans horizontaux d'équation $z = a$ et $z = b$ est égal (exprimé en unités de volume) est égal à $\int_a^b S(z)\,dz$
où S(z) est l'aire de la section du solide par un plan de côte z .

5-Primitives

Définition : On appelle primitive d'une fonction f sur un intervalle I ,toute fonction F dérivable sur I telle que pour tout $x \in$ I , on ait: $F'(x) = f(x)$ .On notera $F = \text{Prim}(f)$

Théorème : Toute fonction f continue sur un intervalle I admet sur cet intervalle une infinité de primitives qui différent d'une constante.
Si F est une primitive de f alors toutes les autres sont de la forme F + C où, C est une constante .

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit x_0 un point de I.
Il existe une unique primitive de f nulle en x_0, cette primitive est égale à $\int_{x_0}^x f(t)\,dt$.

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux points de I .
Soit F une primitive quelconque de f sur cet intervalle .
Alors $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I et λ un réel.
$\text{Prim}(f+g) = \text{Prim}(f) + \text{Prim}(g)$ et $\text{Prim}(\lambda f) = \lambda \text{Prim}(f)$

Remarque : Il n'existe pas de formule générale donnant une primitive pour un produit ou un quotient de deu x fonctions.Mais on a la formule d'intégration par parties suivante.

Formule d'intégration par parties:Soient u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I et soient a et b deux points de I .

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)\,dx$$

Tableau des primitives usuelles :

Fonction $f(x)$	Primitive $F(x)$	Intervalle
0	C (constante)	$\mathbb{R}$
a	$ax + C$	$\mathbb{R}$
x^α ($\alpha \neq -1$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$]0, +\infty[$
$1/x$	$\text{Ln}(x) + C$	$]0, +\infty[$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\mathbb{R}$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I.
Soient U = Prim(u) et V = Prim(v)
- Prim($u(ax+b)$) = $\frac{1}{a}$ U($ax+b$) + C (*a non nul*)
- Prim($u'.u^\alpha$) = $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ + C pour $\alpha \neq -1$
-Prim($\frac{u'}{u}$) = ln(| u |) + C u gardant un signe constant sur I .
-Prim($u'.e^u$) = e^u + C

Francis Cortado

Résumé n°9: Dénombrements et probabilités

1. Dénombrements

a)**Quelques définitions générales**

Soit un ensemble fini E, on considère deux partie A et B de E (ou encore des *sous-ensembles* de E).
On définit l'*union*,*l'intersection* et le *complémentaire* de A par :
• *Union* :$A \cup B$=$\{x \in E$ tel que $x \in A$ ou $x \in B\}$
• *Intersection* :$A \cap B$=$\{x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \in B\}$
• *Complémentaire* :$\overline{A}$=$\{x \in E$ tel que $x \notin A\}$
Lorsque $A \cap B = \emptyset$ on dit que les deux ensembles sont *disjoints*, par définition c'est le cas de A et $\overline{A}$.

Lorsque tout élément de A appartient à B , ,on dit que A est *inclus* dans B.
Une suite de p parties deux à deux disjointes $\{A_1, A_2, \cdots, A_p\}$ de E , dont la réunion est égale à E est appelée *partition* de E, c'est le cas de $\left\{A, \overline{A}\right\}$.
On appelle *produit cartésien de deux ensembles* E et F ,l'ensemble de tous les couples (a, b) où $a \in E$ et $b \in F$, on le note $E \times F$.
Cette définition se généralise au cas du produit cartésien de p ensembles $E_1, \cdots, E_p$,noté $E_1 \times \cdots \times E_p$, dont les éléments sont les *p-uplets* ou *p-listes* $(a_1, \cdots, a_p)$.Lorsque les p ensembles sont tous identiques ,on note E^p le produit cartésien de p exemplaires de cet ensemble E.

b) **Cardinaux des ensembles finis**

Soit E un ensemble fini.On appelle *cardinal* de E et on note $Card(E)$ le nombre d'éléments de E. On a alors les règles suivantes valables pour toutes parties A et B de E

• *Cardinal d'une union* $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$
Dans le cas où A et B sont disjoints on a $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

• *Cardinal du complémentaire* $Card(\overline{A}) = Card(E) - Card(A)$ et $Card(\emptyset = 0)$

• *Cardinal du produit cartésien* $Card(E_1 \times \cdots \times E_p) = Card(E_1) \times \cdots \times Card(E_p)$

Dans le cas où $E_1 = \cdots = E_p$ on a $Card(E^p) = (Card(E))^p$

Dans tout ce qui suit E désigne un ensemble fini à n ($n \neq 0$) éléments.

c) **p - uplets**

On appelle *p-uplet* un élément du produit cartésien E^p de p exemplaires de E.
Le nombre de p-uplets formés à partir des n éléments de E est égal à n^p.
Dans cette formule n et p sont quelconques .
Ce qui signifie que dans un p - uplet les éléments peuvent se répeter plusieurs fois , de plus l'ordre différentie les p - uplet .

d) **Arrangements**

Soit p un entier naturel tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
On appelle *arrangement* de p éléments de E tout p - uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Ce qui signifie *qu'il ne peut pas y avoir répétition* de deux éléments de E dans un même p-uplet, mais *on tient compte de l'ordre*
On appelle *permutation* de E tout arrangement des n éléments de E.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E pris parmi n se note A_n^p,et :

$$\mathrm{A}_n^p = \underbrace{n(n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Avec la convention $0! = 1$,on a les valeurs suivantes : $\mathrm{A}_n^0 = 1 \quad \mathrm{A}_n^1 = n \quad \mathrm{A}_n^n = n!$
Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est égal à $\mathrm{A}_n^n = n!$.

e)**Combinaisons**

Soit E un ensemble de cardinal n, et p un entier naturel vérifiant $0 \leqslant p \leqslant n$.
On appelle *combinaison* de p éléments de E toute partie de E ayant p éléments.
Cela signifie *qu'il ne peut pas y avoir de répétitions* et *qu'on ne tient pas compte de l'ordre*. Le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n se note C_n^p et :

$$\mathrm{C}_n^p = \frac{\mathrm{A}_n^p}{p\,!} = \frac{n!}{p\,!(n-p)!}$$

On a les valeurs suivantes : $\mathrm{C}_n^0 = 1 \quad \mathrm{C}_n^1 = n \quad \mathrm{C}_n^n = 1$.
Ainsi que les relations $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$ et $\mathrm{C}_n^p + \mathrm{C}_n^{p+1} = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}$.
Ce dernier résultat est la *formule du triangle de Pascal*, qui permet d'obtenir les valeurs des coefficients C_n^p.
Ces coefficients sont identiques *aux coefficients binomiaux* $\binom{n}{p}$ qui apparaissent dans la formule du *Binome de Newton*,cette dernière peut donc s'écrire :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p \, a^{n-p} \, b^p$$

Cette formule étant valable pour tout nombres complexes a et b.

f)**Synthèse**

On choisi p éléments parmi n ($n \neq 0$).

Tirage successif avec remise Exemple du *Loto sportif* (3^{13})	n et p quelconques	Ordre et répétition	n^p
Tirage successif sans remise Exemple du *Tiercé* (A_{20}^3)	$0 \leqslant p \leqslant n$	Ordre sans répétition	A_n^p
Tirage simultané Exemple du *Loto* (C_{49}^6)	$0 \leqslant p \leqslant n$	Sans ordre et sans répétition	C_n^p

2. PROBABILITÉS

a)**Généralités**

On considère une *expérience aléatoire* dont les les résultats sont appelés *issues*.
On suppose qu'il existe n issues notées $\omega_1, \ldots, \omega_n$,à cette expérience.
L'ensemble de toutes les issues ,noté $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est appelé *univers des possibles*.
Une partie de Ω est appelée un *événement*,si cet événement est réduit à un seul élément on parle *d'événement élémentaire*.
Ω et $\emptyset$ sont donc deux événements particuliers appelés respectivement *événement certain* et *événement impossible*
On définit une *probabilité* pour cette expérience aléatoire,en faisant correspondre à tout *événement* A un nombre noté $p(A)$ tel que ,pour tout événements A et B on ait :
$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
$p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset\ ) = 0$
Si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

b)**Propriétés**

• On note $\overline{A}$ *l'événement contraire* de A et $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
• Pour tout événements A et B ,on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
• La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$.
• Lorsque tous les les événements élémentaires ont la même probabilité, on qu'il y a *équiprobabilité*.
Si $Card(\Omega) = n$ alors , pour tout événement élémentaire ω_i on a $p(\omega_i) = \dfrac{1}{n}$.
Pour tout événement A on a alors

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

b) **Probabilités conditionnelles**

Soit B un événement de probabilité non nulle.
On appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B* , la probabilité que A soit réalisée sachant que B est réalisée.
On note cette probabilité $p_B(A)$ ou $p(A/B)$.
Le calcul d'une telle probabilité peut s'effectuer directement(d'après l'énoncé de l'exercice) ou bien en appliquant la relation :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Cette dernière relation écrite sous la forme $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ permet de calculer la probabilité d'une *intersection* en fonction d'une probabilité *conditionnelle.*
On ne confondra pas ,dans l'énoncé, une probabilité conditionnelle avec la probabilité d'une intersection
Si la probabilité que A soit réalisée ne dépend pas de B , on dit que les événements A et B sont *indépendants*.
Dans ce cas $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

On ne confondra pas événements indépendants ,$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, *avec événements disjoints* $p(A \cap B) = 0$
Soit B un événement de probabilité non nulle , et soit A un événement quelconque ,alors $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $(A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \emptyset$ donc :

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}) = p_B(A) \times p(B) + p_{\overline{B}}(A) \times p(\overline{B})$$

Ce résultat se généralise au cas d'une *partition*$\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ de Ω en :

$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + \cdots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$$

C'est la *formule des probabilités totales*

Résumé n°10: # VARIABLES ALÉATOIRES

1. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

a)**Généralités**

Soit p une probabilité définie sur un univers Ω.
Une *variable aléatoire* X est une fonction qui associe à chaque événement de Ω un nombre réel .
On appelle *variable aléatoire discrète* une variable aléatoire qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
On note en général $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ les n valeurs prises par la variable aléatoire discrète X, et on note $p(X = x_i)$ la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x_i.
La donnée des n probabilités $\{p_1, \ldots, p_n\}$ définit la *loi de probabilité* de la variable aléatoire discrète X.
On résume ces résultats dans un tableau

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

On note également $p(X = x_i) = p_i$ et alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
On considère une variable aléatoire discrète X dont la loi de probabilité est donné par les couples (x_i, p_i).
On définit les paramètres suivants :
On appelle *espérance mathématique* de X le réel noté $E(X)$ ou $\overline{X}$ défini par :

$$E(X) = x_1.p_1 + x_2.p_2 + \cdots + x_n.p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

On appelle *variance* de X le réel positif noté $Var(X)$ et défini par

$$Var(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$$

On appelle *écart type* de X le réél positif noté $\sigma(X)$ défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

On montre également que $Var(X) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i \right) - (E(X))^2$

b)**Schéma de Bernoulli et loi binomiale**

• On appelle *épreuve de Bernoulli* une épreuve *a deux issues possibles* appelées *succès* et *échec*

On suppose que la probabilité du succès est égale à p et que celle de l'échec à $q = 1 - p$ avec $0 < p < 1$

• On appelle *schéma de Bernoulli* la suite de n épreuves de Bernoulli *indépendantes deux à deux.*

A un schéma de Bernoulli ,on associe la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès obtenu au cours de ces n épreuves.

• On dit alors que X est une *variable aléatoire de Bernoulli* de paramètres n et p ou que X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p.

La *loi de probabilité* de X est donnée par

$$p(X = k) = \mathrm{C}_n^k\, p^k.q^{n-k} \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n$$

L'espérance et la variance d'une loi binomiale X de paramètres n et p sont données par :

$$E(X) = np \text{ et } Var(X) = npq$$

2. VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

a)**Généralités**

• On appelle *variable aléatoire continue* une variable aléatoire pouvant prendre toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non).

Soit X une variable aléatoire continue , la loi de probabilité associée à X est appelée *loi de probabilité continue*,cette loi est nulle sur chaque réel isolément :

Pour tout réel t $p(X = t) = 0$

• On dit que X est une *variable aléatoire continue à densité* définie sur l'intervalle $[a, b]$ si et seulement si il existe une fonction f *continue et positive*,définie sur $[a, b]$ telle que pour tout α et β de l'intervalle $[a, b]$, on ait :

$$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = p([\alpha, \beta]) = \int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x$$

Puisque la probabilité que X soit égale à une valeur donnée est nulle
on a $p(\alpha < X < \beta) = p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$, et autres égalités analogues.

Dans ce cas

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

Une fonction f est *une densité de probabilité* sur un intervalle I si et seulement si :

- f est continue sur I
- f est positive sur I
- $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1$

Avec $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ si I= [a,b]

et $\displaystyle\int_I f(x)\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X f(x)\ \mathrm{d}x$ si I est un intervalle non borné ,par exemple [0,+∞[.

b)**Loi uniforme sur un intervalle $I = [a, b]$**

On appelle *Loi uniforme* sur l'intervalle $I = [a, b]$,la loi de probabilité continue sur I dont la densité f est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{b-a}$

Pour cette loi , la probabilité d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ inclus dans I est :

$$p([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

c)**Loi exponentielle de paramètre λ**

On appelle *loi exponentielle de paramètre λ*, sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$,la loi de probabilité continue sur I dont la densité est la fonction f définie sur I par :
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ où λ est un réel positif fixé.
Pour cette loi , la probabilité d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ inclus dans I est :

$$p([\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

d)**Compléments sur les variables aléatoires**

• On appelle *fonction de répartition* d'une variable aléatoire X , la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = p(X \leqslant t)$.
On a alors $p(X \leqslant b) = F(b)$ et $p(X > a) = 1 - F(a)$ et $p(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.
La fonction de répartition d'une variable aléatoire est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition F est *dérivable* sur $\mathbb{R}$,alors la dérivée f de F est la *densité de probabilité* de X.
• Les notions *d'espérance mathématique* et de *variance* se généralisent aux variables aléatoires continues par les formules :

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad Var(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

X étant une variable aléatoire continue ,de densité f , définie sur un intervalle [a,b].
Par exemple pour une loi exponentielle de paramètre λ , on a :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Résumé n°11: # BARYCENTRES

1. GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITION

• On appelle *système de n points pondérés* ,la donnée de n couples (A_i, α_i) ,pour i variant de 1 à n ,où les A_i sont n points du plan $(\mathscr{P})$ ou de l'espace $(\mathscr{E})$, et les α_i n réels.
On notera $\mathscr{S}$ un tel système , c'est à dire $\mathscr{S}=\{(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\}$
• Soit $\mathscr{S}$ un système de n points pondérés .
On suppose que la somme des coefficients est non nulle :$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$
On appelle *barycentre du système $\mathscr{S}$* l'unique point G tel que

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0} \text{ ou encore } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$$

On notera $G = \mathrm{Bar}(\mathscr{S}) = \mathrm{Bar}\,\{(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\}$
• *Dans la cas où la somme des coefficients est nulle* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 0$,par définition *le système n'admet pas de barycentre.*
• *Cas de deux points*
Dans le cas d'un système de deux points pondérés $\mathscr{S} = \{(A, \alpha), (B, \beta)\}$,avec $\alpha+\beta \neq 0$ on a les résultats suivants :
-Le barycentre G du système $\mathscr{S}$ est caractérisé par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, c'est un point de la droite (AB),d'une façon générale *deux points et leur barycentre sont alignés*
-Dans le cas où $\alpha = \beta = 1$, le barycentre du système $\mathscr{S}$ est le *milieu* I des deux points.
• *Cas de trois points*
Dans le cas d'un système de trois points pondérés $\mathscr{S} = \{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$,avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ on a les résultats suivants :
-Le barycentre G du système $\mathscr{S}$ est caractérisé par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$
Dans le cas où A, B, C sont trois points de l'espace *non alignés*,le point G est un point du plan défini par ces trois points. D'une façon générale ,*trois points et leur barycentre sont coplanaires.*
-Dans le cas où $\alpha = \beta = \gamma = 1$,et si les trois points A, B, C ne sont pas alignés, le barycentre du système $\mathscr{S}$ est le *centre de gravité* du triangle ABC.

2. PROPRIÉTÉS

On considère un système de n points pondérés $\mathscr{S}$,dont la somme des coefficients est non nulle ,et on appelle G le barycentre de ce système.
$\boxed{\mathrm{P}_1}$ *Homogénéité du barycentre*
On ne change pas le barycentre d'un système en multipliant ou en divisant tous ses coefficients par un même réel non nul .

Soit k un réel non nul alors $\mathrm{Bar}\,\{(A_i, \alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\} = \mathrm{Bar}\,\{(A_i, k\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\}$

Conséquence :*Isobarycentre*

Dans le cas où les n coefficients α_i sont égaux à un même réel non nul α , alors le barycentre de ce système est identique au barycentre des n points affectés du coefficient 1.Par définition ce barycentre est appelé *isobarycentre* du système.Dans le cas de deux points on retrouve le milieu ,et dans le cas de trois points non alignés on retrouve le centre de gravité du triangle formé par ces trois points.

$\boxed{\mathrm{P}_2}$ *Associativité*

On ne change pas le barycentre de plusieurs points,en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (supposée non nulle) de leur coefficient

Soit $1 \leqslant p < n$, on suppose que $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$, et on note $H = \mathrm{Bar}\left\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}\right\}$,alors

$$G = \mathrm{Bar}\left\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right\} = \mathrm{Bar}\left\{(H, s), (A_i, \alpha_i)\,\text{avec}\, p+1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$

$\boxed{\mathrm{P}_3}$ *Transformation de* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$

Toujours sous l'hypothèse où le système $\mathscr{S}$ admet un barycentre,alors pour tout point M on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG}$

Dans le cas contraire, pour tout point M le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est un *vecteur constant indépendant du point M.*

$\boxed{\mathrm{P}_4}$ *Coordonnées du barycentre*

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \vec{k}\right)$,on note (x_i, y_i, z_i) les coordonnées du pointA_i, alors les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du barycentre du système $\mathscr{S}$ sont données par :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

$\boxed{\mathrm{P}_5}$ *Affixe du barycentre de n points dans le plan*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note z_i l'affixe du point A_i ,alors l'affixe z_G du barycentre du système $\mathscr{S}$ est donnée par

$$z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Résumé n°12: PRODUIT SCALAIRE

1. DÉFINITION ET GÉNÉRALITÉS

a) **Définitions**

Les définitions et propriétés concernant le produit scalaire dans l'espace sont analogues à celles rencontrées lors de l'étude du produit scalaire dans le plan.
On rappelle de plus que la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est égale à sa longueur :
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$
Dans tout ce qui suit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent deux vecteurs du plan ou de l'espace.

def$_1$ *Définition à l'aide de la norme*
Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le *nombre réel* noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ et défini par :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

On appelle *carré scalaire* de $\overrightarrow{u}$ le réel positif défini par $\overrightarrow{u}^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

def$_2$ *Définition trigonométrique*
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

Si l'un des deux vecteurs est nul ,alors leur produit scalaire est nul.

def$_3$ *Définition géométrique*
Soient deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$,et soit H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) ,alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$$

où $\overline{OA}$ désigne *la mesure algébrique*du segment [O,A],le produit $\overline{OA} \times \overline{OH}$ étant indépendant du sens choisi sur l'axe (OA).

def$_4$ *Orthogonalité de deux vecteurs*
On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \,\text{ou}\, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}) \text{ ou } (\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \frac{\pi}{2}$$

b)**Expression analytique du produit scalaire**

Le plan $\mathscr{P}$ et l'espace $\mathscr{E}$ sont muni respectivement des *repères orthonormés* $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$ et $\left(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\vec{k}\right)$.
Soient $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ deux vecteurs de $\mathscr{P}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$
Soient $\overrightarrow{u}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{v}(x',y',z')$ deux vecteurs de $\mathscr{E}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$
Il en résulte les deux *expressions analytiques pour la norme* d'un vecteur $\overrightarrow{u}$:
Dans le plan $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}^2 = x^2+y^2$
Dans l'espace $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}^2 = x^2+y^2+z^2$
Ainsi que les conditions *analytiques d'orthogonalité* suivantes
Dans le plan $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$
Dans l'espace $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

2. Propriétés

$\boxed{\mathrm{P}_1}$ *Propriétés algébriques du produit scalaire*

Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan ou de l'espace , et soit λ un réel

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ $\quad \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ $\quad (\lambda\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \lambda \times (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

$\overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

Dans tout ce qui suit ,le plan ou l'espace,sont munis d'un repère orthonormé.

def$_5$ *vecteur normal*

• Dans le plan ,on appelle *vecteur normal* à une droite $(\mathscr{D})$ un vecteur orthogonal à un vecteur directeur quelconque de cette droite $(\mathscr{D})$.

• Dans l'espace ,on appelle *vecteur normal* à un plan $(\mathscr{P})$ un vecteur orthognal à deux vecteurs quelconques de $(\mathscr{P})$ *non colinéaires.*

$\boxed{\mathrm{P}_2}$ *Détermination d'une droite et d'un plan connaissant un point et un vecteur normal*

• Soit A un point du plan , et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul du plan.Alors *il existe une unique droite $(\mathscr{D})$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$*

• Soit A un point de l'espace , et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul de l'espace.Alors *il existe un unique plan $(\mathscr{P})$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$*

Ce sont tous les deux l'ensemble des points M,du plan ou de l'espace,tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$

$\boxed{\mathrm{P}_3}$ *Equations cartésiennes de droite et de plan de vecteur normal donné*

• Dans le plan,l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$ est de la forme $ax + by + c = 0$.

Réciproquement, une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (a, b).

• Dans l'espace,l'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ est de la forme $ax + by + cz + d = 0$

Réciproquement, une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est l'équation d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de coordonnées (a, b, c).

$\boxed{\mathrm{P}_4}$ *Distance d'un point à une droite ou à un plan*

• Dans le plan $\mathscr{P}$, on considère la droite $(\mathscr{D})$ d'équation : $ax + by + c = 0$ et le point A de coordonnées (x_0, y_0).

Alors la distance du point A à la droite$(\mathscr{D})$,notée $d(A, \mathscr{D})$ est :

$$d(A, \mathscr{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

• Dans l'espace $\mathscr{E}$, on considère le droite $(\mathscr{P})$ d'équation : $ax + by + cz + d = 0$ et le point A de coordonnées (x_0, y_0, z_0).

Alors la distance du point A au plan $(\mathscr{P})$,notée $d(A, \mathscr{P})$ est :

$$d(A, \mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\boxed{P_5}$ *Orthogonalité dans l'espace*

Dans l'espace ,soient $(\mathscr{D}_{\overrightarrow{u}})$ et $(\mathscr{D}_{\overrightarrow{v}})$ deux droites de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$,et soient $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}})$ et $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}'})$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.

• $(\mathscr{D}_{\overrightarrow{u}})$ et $(\mathscr{D}_{\overrightarrow{v}})$ sont orhogonales si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$.
• $(\mathscr{D}_{\overrightarrow{u}})$ et $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}})$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont *colinéaires.*
• $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}})$ et $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}'})$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n}'=0$

$\boxed{P_6}$ *Relations métriques dans un triangle quelconque*

On considère un triangle ABC et on note I le milieu de [A,B].,alors :

$MA^2+MB^2=2IM^2+\dfrac{AB^2}{2}$(formule de la médiane)

$MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=IM^2-\dfrac{AB^2}{4}$

Si de plus on note $a=BC, b=AC, c=AB$ alors :

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$ et autres relations analogues (formule d'Al-Kashi)

3. DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

a)**Position relative de deux plans**

Soient $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}})$ et $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}'})$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$,et d équations respectives :

$$ax+by+cz+d=0 \text{ et } a'x+b'y+c'z+d'=0$$

alors

• $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}})$ et $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}'})$ sont *parallèles* ,si et seulement si ,$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont *colinéaires.*
• $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}})$ et $(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}'})$ sont *sécants* ,si et seulement si ,$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ ne sont *pas colinéaires.*

Dans le cas où les deux plans sont sécants ,leur intersection est une droite $(\mathscr{D})$,caractérisée analytiquement par les solutions du système

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Ce qui donne un système d'équations paramétriques de la droite $(\mathscr{D})$ sous la forme :

$$\begin{cases} x &= x_0+k\alpha \\ y &= y_0+k\beta \quad \text{où k est un réel quelconque} \\ z &= z_0+k\gamma \end{cases}$$

(x_0, y_0, z_0) étant les *coordonnées d'un point* de $(\mathscr{D})$ et (α, β, γ) les *coordonnées d'un vecteur directeur* de $(\mathscr{D})$.Ce résultat admet une réciproque.

b)**Position relative d'une droite et d'un plan**

$(\mathscr{P}_{\overrightarrow{n}})$ et $(\mathscr{D}_{\overrightarrow{u}})$ sont *parallèles* si et seulement si ,$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont *orthogonaux.*

c)**Position relative de trois plans**

Lorsque trois plans *ne sont pas parallèles deux à deux*, alors leur intersection est ,soit *vide* ,soit une *droite* ,soit un *point.*

Analytiquement,cette intersection s'obtient en résolvant le système formé par les équations cartésiennes des trois plans.